Niveau T^{le}

Éric Dubon
Francisco del Rey

Mathématiques d'excellence

Cours pour lycéens très motivés

2e édition

ellipses

Chapitre 1

Barycentres

Sommaire

Dans ce chapitre, on se place dans un plan ou dans l'espace.

L'axiome 4 page 335 du manuel de première (Les théorèmes de la géométrie plane s'appliquent dans tous les plans de l'espace) justifie l'expression « du plan ou de l'espace » qui sera massivement utilisée par la suite :

- si on se place dans l'espace, on considère un barycentre dans l'espace.
- si on se place dans le plan, on considère un barycentre dans ce plan.
- si on se place dans le plan de l'espace, on considère un barycentre dans ce plan de l'espace, peu importe le plan dans lequel on se place.

1.1 Définitions et premières propriétés

1.1.1 Fonction vectorielle de Leibniz

On appelle **point pondéré** ou **point massif**, tout couple (A, α) où A est un point du plan ou de l'espace et α est un réel.

Soit un ensemble de points massifs $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)$. On appelle **fonction vectorielle de Leibniz** la fonction qui à tout point M du plan ou de l'espace associe le vecteur $\overrightarrow{V}_M$ noté aussi $\overrightarrow{f(M)}$ telle que

$$\overrightarrow{V}_M = \alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{MA_i}$$

Remarque 1.

Cherchons s'il existe des points M tels que $\overrightarrow{V}_M = \overrightarrow{0}$.
Nous choisissons un point O et par la règle de Chasles on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}_M &= \alpha_1(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1}) + \ldots + \alpha_n(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MO} + \alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n} \\ &= (\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)\overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}\end{aligned}.$$

Ainsi $\overrightarrow{V}_M = \overrightarrow{0}$ équivaut à $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{f(O)} = \overrightarrow{0}$.

Nous avons alors deux cas :

1. Si $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right) = 0$ alors
   - si $\overrightarrow{f(O)} = \overrightarrow{0}$ tout point M est solution.
   - si $\overrightarrow{f(O)} \neq \overrightarrow{0}$ il n'y a pas de solution.
2. Si $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right) \neq 0$ alors $\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{OM}$ et ainsi il existe une solution unique qui est un point M vérifiant :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$$

Définition 1.

Étant donné un système de points pondérés $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\dots,(A_n,\alpha_n)\}$ tels que $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right) \neq 0$, il existe, alors, un unique point, noté G, du plan ou de l'espace tel que :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$

déterminé par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}.$$

Ce point G se nomme **barycentre** de ce système de points pondérés.

1.1.2 Réduction de la fonction vectorielle de Leibniz

Nous avons vu que si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$ alors

$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}.$

Maintenant si on place le point O en G nous obtenons :

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MG}$$

Autrement dit la somme de Leibniz peut être réduite :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MG}$$

Remarque 2.

Dans le cas où tous les coefficients sont égaux, le point G s'appelle **isobarycentre** des n points.
Par exemple, l'isobarycentre de deux points du plan A et B est le milieu du segment $[AB]$.
De même, l'isobarycentre de trois points du plan A, B, C non alignés est le centre de gravité du triangle ABC.

Exemple 1
Supposons que l'on nous donne deux points pondérés (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$.
Nous avons alors $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ ce qui donne grâce à la relation de Chasles $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0}$ autrement dit après avoir factorisé :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont donc colinéaires ce qui signifie que les points A, B et G sont alignés.

Exercice 1.

Construire le barycentre G des points pondérés $(A, 1), (B, 1), (C, -1)$.

Solution 1
Nous avons $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}{1 + 1 - 1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Remarque 3.

Dire que G est le barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, -1)$ est équivalent à dire que $AGBC$ est un parallélogramme.

1.1.3 Coordonnées du barycentre

Grâce à la formule vue précédemment $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$ nous pouvons obtenir les coordonnées du barycentre G dans un repère (orthonormé ou pas) :

$$x_G = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}; \; y_G = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}; \; z_G = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Si on appelle $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les affixes respectives des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, alors l'affixe z_G du barycentre G du système pondéré

$\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)\}$ est

$$z_G = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

1.2 Propriétés du barycentre

1. Le barycentre ne change pas si on modifie l'ordre des points.
2. Le barycentre ne change pas si on multiplie les poids des points par un même réel k non nul.
3. Si les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ appartiennent à une même droite alors G est aussi un point de cette droite.
4. Si les points $A_1, \ldots, A_n$ appartiennent à un même plan alors G appartient aussi à ce plan.

Théorème 1 (Barycentre partiel)
Dans la construction du barycentre de n points pondérés, on peut remplacer un certain nombre de ces points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients des points qu'il remplace.

Démonstration 1
Soit le système $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ avec G barycentre de ces points. On a donc :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \ldots + \alpha_p \overrightarrow{GA_p} + \alpha_{p+1} \overrightarrow{GA_{p+1}} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}. \tag{1.1}$$

Le barycentre étant indépendant de l'ordre des points, on peut donc démontrer le théorème pour les p premiers points.
Soit I le barycentre de $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_p, \alpha_p)$ avec $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p \neq 0$, on a alors :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \ldots + \alpha_p \overrightarrow{GA_p} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_p) \overrightarrow{GI}.$$

Si nous reportons alors cette égalité dans (1.1), nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{GI} + \alpha_{p+1} \overrightarrow{GA_{p+1}} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}.$$

Ceci signifie donc que G est le barycentre des points pondérés
$(I, \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i),\ (A_{p+1}, \alpha_{p+1}), \ldots, (A_n, \alpha_n)$. □

Exercice 2.

1. Soient $ABCD$ un tétraèdre et P, Q, R des points tels que $ABCQ$, $ABDP$, $BDCR$ sont des parallélogrammes.
   Montrer que les droites (CP), (DQ), (AR) sont concourantes en G barycentre de $\{(A,1),(B,-1),(C,1),(D,1)\}$.

2. Démontrer la propriété suivante :

> **Théorème 2**
> Dans un tétraèdre, les quatre segments joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée concourent en G isobarycentre de A, B, C, D, le point G étant situé aux trois-quarts de $\overrightarrow{AG_A}$ où G_A est le centre de gravité du triangle BCD.
> De plus, les trois segments joignant les milieux de deux arêtes opposées ont pour milieu le point G.

Solution 2

1. Nous avons $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RD}$ donc $-\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RD} = \overrightarrow{0}$. Nous avons alors R barycentre de $(B,-1),(C,1)$ et $(D,1)$ et ainsi G est le barycentre de $(A,1)$ et $(R,1)$ ce qui implique que c'est un point de (AR) et grâce aux poids nous concluons que G est le milieu de $[AR]$.

   De plus, comme nous avons $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD}$ alors nous avons $-\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{0}$. Cette égalité nous dit que P est le barycentre de $(B,-1),(A,1)$ et $(D,1)$ et donc que G est le barycentre de $(P,1),(C,1)$ ce qui, par le même raisonnement que précédemment nous permet de conclure que G est le milieu de $[PC]$.
   Par un raisonnement analogue à ce que nous venons de faire mais cette fois-ci avec le parallélogramme $ABCQ$ nous obtenons G milieu de $[QD]$.
   Finalement G est bien le point d'intersection des trois droites $(AR),(DQ)$ et (CP).

2. Soit G l'isobarycentre des sommets A, B, C et D (autrement dit le centre de gravité du tétraèdre). Autrement dit nous avons :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}.$$

   Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$ (arêtes opposées).
   Le point G est aussi le barycentre de $(I,2)$ et $(J,2)$ ce qui implique que G est le milieu de $[IJ]$. De même, nous avons G milieu des segments $[KN]$ et $[LM]$.

   Soit G_A le centre de gravité de BCD (autrement dit isobarycentre de B, C, D) alors G est aussi le barycentre de $(A,1),(G_A,3)$ donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$. Ainsi G est un point de (AG_A).
   Par le même raisonnement nous obtenons $\overrightarrow{BG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BG_B}$, $\overrightarrow{CG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{CG_C}$, $\overrightarrow{DG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DG_D}$.

1.3 Fonction scalaire de Leibniz. Lignes de niveau

On considère un système de n points pondérés $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$. On appelle **fonction scalaire de Leibniz** (associée à ce système) la fonction ϕ qui à chaque point M du plan associe le réel :

$$\phi(M) = \alpha_1 MA_1^2 + \ldots + \alpha_n MA_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2.$$

1.3.1 Ligne de niveau $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = k$

Le réel k étant donné, il s'agit de donner l'ensemble des points M du plan tels que $\phi(M) = k$. Cet ensemble que l'on notera (E) s'appelle **ligne de niveau** k de la fonction ϕ.

Procédé pour déterminer (E).

Premier cas : si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

On désigne, alors, par G le barycentre du système $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ ce qui nous donne

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

Ainsi pour tout point M du plan, par la relation de Chasles, on a :

$$\phi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i})^2.$$

Puis par la formule des identités remarquables et le produit scalaire, on obtient :

$$\phi(M) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2.$$

Or, $\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_i} = 2\overrightarrow{MG} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0$ car $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.

En conclusion, pour tout point M du plan,

$$\phi(M) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}^2 = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) MG^2 + \phi(G).$$

Le réel $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}^2$ est imposé par les données de l'énoncé, on le notera K. Ainsi nous obtenons l'équivalence suivante :

$$\phi(M) = k \Leftrightarrow GM^2 = \frac{k - K}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Si nous posons $\dfrac{k-K}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} = K'$ alors :

$$\phi(M) = k \Leftrightarrow GM^2 = K'.$$

Ce qui mène à la discussion suivante :
- Si $K' < 0$ alors (E) est l'ensemble vide.
- Si $K' = 0$ alors (E) se réduit au point G.
- Si $K' > 0$ alors (E) est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{K'}$.

Remarque 4.

Si on constate qu'un certain point $A \neq G$ est un point de la ligne de niveau k de ϕ, alors on peut affirmer sans autre calcul que cette ligne de niveau est le cercle de centre G et de rayon GA.

Exercice 3.

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que

$$AB = AC = a.$$

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 5a^2.$$

Solution 3

Soit G le barycentre de $(A, 2), (B, 1), (C, 1)$. Soit I le milieu de $[BC]$ on a donc $(I, 2)$. Ainsi G est le barycentre de $(A, 2), (I, 2)$ autrement dit G est le milieu de $[AI]$.
Commençons tout d'abord par le membre de gauche de l'égalité, nous avons :

$$\begin{aligned} 2MA^2 + MB^2 + MC^2 &= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 4MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}). \end{aligned}$$

Le fait que G soit barycentre nous donne $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
Ainsi $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + GC^2 = 5a^2$.

Le fait que ABC soit un triangle rectangle isocèle donc par le théorème de Pythagore dans le triangle AIC, nous obtenons $GA = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ et donc $2GA^2 = \dfrac{a^2}{4}$.
Nous avons $AI = IB$ et G milieu de $[AI]$ donc $GB^2 = GA^2 + IB^2 = \dfrac{a^2}{8} + \dfrac{2a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{8}$. Comme de plus $GB = GC$, on a $GB^2 = GC^2$.

Finalement $2GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{5a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{2}$.